UNIVERSITE PAUL SABATIER

TOULOUSE III

L3 Parcours Physique et Application à l'Energie

EL5PPAB1

Année 2011/2012

TD 2 - DIFFERENTIATION DE FONCTIONS REELLES A PLUSIEURS VARIABLES

I – Dérivées partielles

1. On donne la fonction dérivable $f(y)$. La variable y est une fonction de la position x. On note y' la dérivée de y par rapport à x et y'' la dérivée seconde. Calculer les dérivées $\frac{df}{dx}$ et $\frac{d^2f}{dx^2}$.
2. Application. On donne $f(y) = \exp(-y^2)$. Calculer d'abord $\frac{df}{dy}$ et $\frac{d^2f}{dy^2}$. Calculer ensuite $\frac{df}{dx}$ et $\frac{d^2f}{dx^2}$ en fonction de y' et y''.
3. On donne une fonction différentiable de deux variables $g(a,x)$. La variable a est une fonction du temps t. On note $\dot{a}$ la dérivée de a par rapport au temps. Écrire la dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial t}\Big|_x$.
4. Application. On donne $g(a,x) = c\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{b^2}\right)$ où b et c sont des constantes et a est une fonction du temps t. Écrire les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial t}\Big|_x$, $\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_t$, $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\Big|_x$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\Big|_t$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial t}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial x}$. Vérifier le théorème de Schwartz.
5. En utilisant l'équation des ondes, trouver la fonction $a(t)$ pour que $g(a,x)$ vérifie l'équation des ondes. Pouvait-on prévoir ce(s) résultat(s) ?

II – Dérivées partielles - Egalité de Schwartz

1. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :
   $U_1(x, y) = x\,y$, $U_2(x, y) = x^2 + y^2$, $U_3(x, y, z) = x^3 \ln(y) \sin^2(z)$.
   Donner l'expression des différentielles de ces fonctions.
2. Soit la fonction $f(x, y) = 3xy(x^3 + y^3) - (x^{-4} + y^{-4})$. Vérifier l'égalité de Schwartz.
3. Soit la forme différentielle : $\delta z = (y^2 - x)\,dx + x^2\,dy$. Est-elle une différentielle totale exacte ?
4. Même question avec les formes différentielles suivantes :
   $\delta z = x\,dx + y dy$,
   $\delta z = (5x^4y - 3y^2)\,dx + (x^5 - 6xy)\,dy$.

III – Soit $r = e^{-p^2-q^2}$ avec $p = e^s$ et $q = e^{-s}$, trouver dr/ds.

IV – Soit $z = xe^{-y}$ avec $x = \cosh(t)$ et $y = \cos(s)$, trouver $\frac{\partial z}{\partial t}$ et $\frac{\partial z}{\partial s}$.